# Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

## 1. Definicja pochodnej

Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$. Załóżmy, że istnieje otoczenie $U$ punktu $x_0$ takie, że $x_0 \in U \subset D_f$. Jeśli $x \in U$, to liczbę

$$\Delta x = h := x - x_0$$

nazywamy przyrostem argumentu. Liczbę

$$\Delta f = \Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

nazywamy przyrostem funkcji $f$ w punkcie $x_0$. Stosunek

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

nazywamy ilorazem różnicowym funkcji $f$ w punkcie $x_0$.

Definicja Pochodną funkcji $f$ w punkcie $x_0$ nazywamy granicę (o ile istnieje)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Interpretacja geometryczna

Pochodna $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta nachylenia prostej stycznej w punkcie $(x_0, f(x_0))$ do wykresu funkcji $f$ w stosunku do osi $OX$. Stąd równanie tej prostej stycznej jest postaci

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

gdzie $y_0 = f(x_0)$. Oczywiście $D_{f'} \subseteq D_f$.

<u>Przykład</u> $f(x) = 2x^2 + 5x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

Mamy

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x_0+h)^2 + 5(x_0+h) - 1 - (2x_0^2 + 5x_0 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (4x_0 + 2h + 5) = 4x_0 + 5.$$

## Pochodne wyższych rzędów

Jeśli funkcja $f' : x \mapsto f'(x)$ ma pochodną, to nazywamy ją pochodną rzędu drugiego i oznaczamy przez $f''$. Zatem

$$f'' = (f')'$$

Postępując rekurencyjnie definiujemy pochodną rzędu $n$:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Ponadto

$$D_{f^{(n)}} \subseteq D_{f^{(n-1)}} \subseteq \ldots \subseteq D_{f'} \subseteq D_f .$$

## 2. Własności pochodnej

Twierdzenie. Każda funkcja, która ma pochodną w jakimś punkcie jest ciągła w tym punkcie.

Twierdzenie. Jeśli funkcje $f, g : U \to \mathbb{R}$ mają pochodne w zbiorze $U$, to funkcje

$$f+g, \quad f-g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}, \; g \neq 0$$

mają pochodne w $U$ oraz

$$(f \pm g)' = f' \pm g',$$
$$(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g',$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}.$$

<u>Twierdzenie</u> Niech $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jeśli funkcja $f$ ma pochodną $f'(x_0)$ w punkcie $x_0$, zaś funkcja $g$ ma w punkcie $y_0 = f(x_0)$ pochodną $g'(y_0)$, to złożenie $g \circ f$ ma pochodną w punkcie $x_0$, przy czym
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

<u>Twierdzenie</u> Jeśli funkcja $f$ jest ściśle monotoniczna i ciągła w otoczeniu punktu $x_0$ i istnieje pochodna $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna $f^{-1}$ ma pochodną w punkcie $y_0 = f(x_0)$, przy czym

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

# Wzory podstawowe

1. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ , $\alpha \in R$, $x>0$

- $(c)' = 0$ , $C = const$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $x \neq 0$
- $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $x>0$

  - $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
  - $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

2. $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3. $((a)^x)' = a^x \cdot \ln a$ $a>0, a \neq 1$

- $(e^x)' = e^x$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $\quad x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

5. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in (-1, 1)$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in (-1, 1)$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

## 3. Wybrane twierdzenia rachunku różniczkowego

Definicja Niech $f: U \to \mathbb{R}$, $U$ - jest zbiorem otwartym i niech $x_0 \in U$. Mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$

1. maksimum lokalne, jeśli istnieje $r > 0$ takie, że przedział $(x_0 - r, x_0 + r) \subset U$ ora

oraz

$$\bigwedge_{x \in (x_0 - r,\, x_0 + r)} f(x) \leq f(x_0)$$

2. minimum lokalne, jeśli istnieje $r > 0$ takie, że przedział $(x_0 - r, x_0 + r) \subset U$ oraz

$$\bigwedge_{x \in (x_0 - r,\, x_0 + r)} f(x_0) \leq f(x)$$

Jeśli w obu powyższych nierównościach spełnione są nierówności $f(x) < f(x_0)$ lub $f(x_0) < f(x)$ dla $x \neq x_0$, to mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ maksimum lub minimum lokalne właściwe.

Maksima i minima lokalne nazywane są ekstremami lokalnymi.

Przykład $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$, $x \in \mathbb{R}$

W punktach $x = -1$, $x = 1$ funkcja ma minima lokalne właściwe równe 0 i jest to wartość najmniejsza. W punkcie $x = 0$ funkcja ma maksimum lokalne. Nie przyjmuje wartości największej.

Przykłady Inne przykłady na dołączonym zdjęciu

TWIERDZENIE (FERMATA) - (Warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeśli funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to

$$f'(x_0) = 0.$$

UWAGI

1. Styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie ekstremum lokalnego jest równoległa do osi $OX$.

2. Punkty, w których pochodna funkcji jest równa zeru nazywamy punktami krytycznymi.

3. Warunek $f'(x_0)=0$ jest warunkiem koniecznym na istnienie ekstremum lokalnego, nie jest natomiast warunkiem wystarczającym. Np. dla funkcji $f(x) = x^3$ mamy $f'(x) = 3x^2$, a zatem $f'(0)=0$. Ale w punkcie $x=0$ funkcja nie ma ekstremum lokalnego, tylko tzw. punkt przegięcia.

Twierdzenie. Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[a,b]$ i różniczkowalną na $(a,b)$. Wtedy

1. Jeśli $\bigwedge_{x \in (a,b)} f(x)=0$ to $f$ jest funkcją stałą ~~na~~ $[a,b]$.
2. Jeśli $\bigwedge_{x \in (a,b)} f'(x)<0$ –"– ——— malejącą –"–
3. Jeśli $\bigwedge_{x \in (a,b)} f'(x)>0$ to –"– ——— rosnącą –"–

UWAGA Warunek $f'(x)>0$ dla $x \in (a,b)$ jest warunkiem wystarczającym na to, aby funkcja $f$ była rosnąca $[a,b]$, zaś warunek $f'(x)<0$ dla $x \in (a,b)$ jest warunkiem wystarczającym na to, aby funkcja $f$ była malejąca na $[a,b]$. Warunki te nie są konieczne. Na przykład funkcja $f(x)=\sqrt[3]{x}$ jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$, ale nie ma pochodnej w punkcie $x_0=0$. Z kolei funkcja ~~$f(x)=$~~ $f(x)=x^3$ jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$, ale $f'(0)=0$

Mamy następujące twierdzenie.

**Twierdzenie** Jeśli funkcja $f$ jest różniczkowalna na $(a,b)$ oraz jest

1. jest rosnąca na $(a,b)$, to $\bigwedge_{x\in(a,b)} f'(x) \geq 0$,
2. malejąca na $(a,b)$, to $\bigwedge_{x\in(a,b)} f'(x) \leq 0$.

**Przykład** Zbadamy monotoniczność i wyznaczymy ekstrema lokalne funkcji

$$f(x) = x\cdot e^x, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Mamy:

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

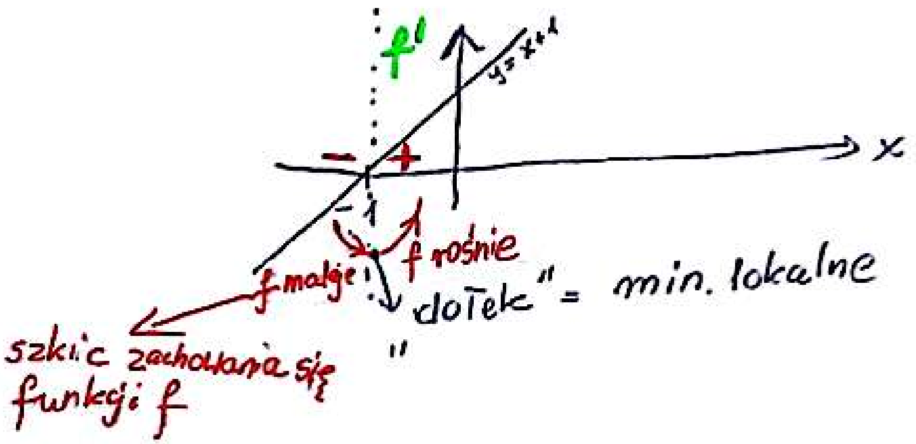
Stąd $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)e^x=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

W punkcie krytycznym $x=-1$ może istnieć (lecz nie musi) ekstremum lokalne funkcji.
Aby sprawdzić czy tak jest w istocie, zbadamy czy zmienia się znak pochodnej (monotoniczność funkcji) przy „przejściu" przez punkt $x=-1$.

Mamy

$$\begin{cases} f'(x)>0 \iff x\in(-1,+\infty) & \text{– fukcja rośnie} \\ f'(x)<0 \iff x\in(-\infty,-1) & \text{– funkcja } f \text{ maleje} \\ f'(x)=0 \iff \underbrace{x=-1} & \end{cases}$$

punkt krytyczny, w którym funkcja $f$ ma minimum lokalne




← Na rysunku szkic, jak zmienia się znak $f'$

## Twierdzenie (Reguła de L' Hospitala).

Niech $D=(a,b)\setminus\{x_0\}$, gdzie $x_0$ jest punktem skupienia przedziału $(a,b)$. Niech $f,g: D\to\mathbb{R}$ będą różniczkowalne na $D$ i $g'(x)\neq 0$ dla $x\in D$. Załóżmy ponadto, że

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$$

lub

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$$

oraz istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Scanned by CamScanner

Przy powyższych założeniach istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi równość

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

UWAGA Reguła de L'Hospitala pozostaje prawdziwa jeśli granicę w $x_0$ zastąpimy granicami w jednostronnymi w $x_0$ lub granicami w $+\infty$ lub w $-\infty$.

UWAGA Reguła de L'Hospitala pozwala obliczać granice funkcji w przypadku symboli nieoznaczonych $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

UWAGA Jest 7 symboli nieoznaczonych:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0 \cdot \infty], [\infty - \infty], [0^0], [\infty^0], [1^\infty].$$

- W przypadku dwóch pierwszych - stosujemy regułę de L'Hospitala.
- Pozostałe symbole można przekształcić tak, że w otrzymanych wyrażeniach wystąpią $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ i wtedy można zastosować regułę de L'Hospitala.

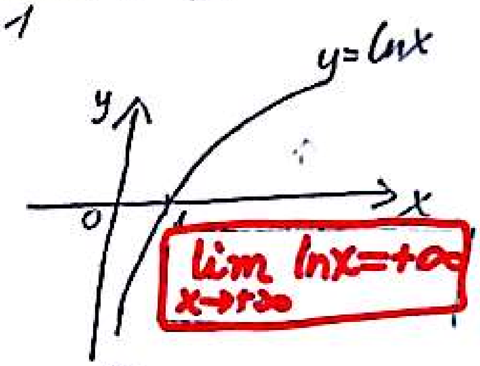
## Przykłady

$\boxed{tg\,0=0}$

$\left[\frac{0}{0}\right]$ **1)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{(tg\,x)'}{(x)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = 1$ $\boxed{\cos 0 = 1}$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ **2)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$




$\left[0\cdot\infty\right]$ **3)** $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x) = [0\cdot(-\infty)]$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0.$

$\left[\infty-\infty\right]$ **4)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{1\cdot\sin x + x\cdot\cos x} =$

$= \left[\frac{0}{0}\right]$ jeszcze raz stosujemy regułę de L'Hospitale

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + \underbrace{x \cdot \cos x}_{\text{iloczyn !!}})'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\underbrace{\cos x}_{1} + 1 \cdot \underbrace{\cos x}_{1} + (\underbrace{x}_{0} \cdot (\underbrace{-\sin x}_{0}))}$$

$$= \boxed{\sin 0 = 0} \ \boxed{\cos 0 = 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

## 5. SYMBOLE $[0^0], [\infty^0], [1^\infty]$

Korzystamy z własności:

1) $y = e^{\ln y}$ $\quad y>0$

2) $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$, $\quad x>0$

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left[(+\infty)^0\right] = \lim_{x \to +\infty} e^{\ln (x^{\frac{1}{x}})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x} =$$

$$= e^{\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]} \overset{H}{=} e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'}}$$

$$= e^{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1}\right)} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$