Macierze

<u>Def.</u> **Macierzą** (rzeczywistą) wymiaru $m \times n$ (tzn. o m wierszach i n kolumnach) nazywamy funkcję:

$$M: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Macierz M każdej parze liczb naturalnych (i, j), gdzie $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ przyporządkowuje liczbę $M(i, j)$ ze zbioru $\mathbb{R}$, nazywaną elementem macierzy. Dla elementu $M(i, j)$ przyjęto się stosować oznaczenia a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, itd. Liczba i jest dla elementu a_{ij} numerem wiersza, a liczba j oznacza numer kolumny.

Zbiór wszystkich macierzy o wymiarach $m \times n$ (rzeczywistych) oznaczamy symbolem

$$M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Stosuje się notację

$$M = [a_{ij}]_{\substack{i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n}}, \quad M = \begin{array}{c l} \text{kolumny macierzy } M & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \text{: wiersze macierzy } M \end{array}$$

W zbiorze macierzy $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ można zdefiniować dwa działania: dodawanie macierzy, mnożenie macierzy przez liczbę ze zbioru $\mathbb{R}$.

1. Dodawanie macierzy: $\oplus$

$$\bigwedge_{\substack{[a_{ij}]\in M_{m\times n}(\mathbb{R})\\ [b_{ij}]\in M_{m\times n}(\mathbb{R})}} [a_{ij}] \oplus [b_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}].$$

2. Mnożenie macierzy przez liczbę: $\odot$

$$\bigwedge_{\alpha\in\mathbb{R}} \ \bigwedge_{[a_{ij}]\in M_{m\times n}(\mathbb{R})} \alpha\odot[a_{ij}] = [\alpha\cdot a_{ij}].$$

Przykłady:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\\5&0\end{bmatrix}\in M_{3\times 2}(\mathbb{R}),\quad B=\begin{bmatrix}6&1\\0&4\\-2&-3\end{bmatrix}\in M_{3\times 2},\quad \alpha=3,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Mamy

$$A\oplus B=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\\5&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}6&1\\0&4\\-2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6&2+1\\3+0&-1+4\\5-2&0-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&3\\3&3\\3&-3\end{bmatrix}\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

$$3\odot A=3\odot\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\\5&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot1&3\cdot2\\3\cdot3&3\cdot(-1)\\3\cdot5&3\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\9&-3\\15&0\end{bmatrix}\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

UWAGA:

W dalszych rozważaniach działanie dodawania macierzy $\oplus$ oznaczać będziemy przez „$+$”, a działanie mnożenia macierzy przez liczbę (rzeczywistą) $\odot$ przez „$\cdot$”.

Def. Macierz

$$\Theta = [0]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}^{n} \Big\} m$$

theta

nazywamy macierzą zerową.

Def. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Macierz postaci

$$-A = [-a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

nazywamy macierzą przeciwną do macierzy A.

TWIERDZENIE

Dla dowolnych macierzy $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ zachodzą równości

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$ → dodawanie macierzy jest łączne
2. $A + \Theta = A$
3. $A + B = B + A$ → dodawanie macierzy jest przemienne
4. $A + (-A) = A - A = \Theta$

Def. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Macierz

1. $$A^j = [a_{kj}]_{k=1,\dots,m} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$$

nazywamy j-tą kolumną macierzy A.

2. $$A_i = [a_{ik}]_{k=1,\dots,n} = [a_{i1}, \dots a_{in}] \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$$

nazywamy i-tym wierszem macierzy A.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & A^j \text{ (j-ta kolumna)} & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \to A_i \text{ (i-ty wiersz)} \\ \\ \\ \end{array}$$

Def.

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Macierz

$$A^T = [a_{ji}]_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$

nazywamy macierzą transponowaną macierzy A.
Macierz transponowana powstaje przez zamianę w danej macierzy wierszy z kolumnami.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

TWIERDZENIE

Dla dowolnych $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzą

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$

3. Mnożenie macierzy.

Niech $m, n, p \in \mathbb{N}$. Mnożenie macierzy jest to funkcja

$$„\cdot" : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times p}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m\times p}(\mathbb{R})$$

określona następująco:

$$\bigwedge_{[a_{ij}]\in M_{m\times n}(\mathbb{R})} \ \bigwedge_{[b_{ij}]\in M_{n\times p}} [a_{ij}]\cdot[b_{ij}] = [c_{ij}],$$

gdzie

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p. \end{matrix}$$

Oznacza to, że element c_{ij} (tzn. element stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie) macierzy $[c_{ij}]$ otrzymujemy „mnożąc" przez siebie i-ty wiersz macierzy $[a_{ij}]$ przez j-tą kolumnę macierzy $[b_{ij}]$.

UWAGA ??? Mnożenie $A\cdot B$ jest wykonalne tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B.

Przykład $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot(-3); & 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 \\ -2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 4\cdot(-3); & -2\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 4\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 5\cdot(-3); & -1\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 5\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0-3 & 4-3+1 \\ -2+0-12 & -4-1+4 \\ -1+0-15 & -2+0+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -14 & -1 \\ -16 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

4. Macierze kwadratowe

Def.

Jeśli $m = n$, to macierz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ nazywamy macierzą kwadratową. Liczbę n nazywamy stopniem macierzy A.

W zbiorze $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ macierzy kwadratowych stopnia n wyróżnia się macierz

$$I = [\delta_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}, \text{ gdzie } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i=j, \\ 0 & \text{dla } i\neq j, \end{cases}$$

nazywaną macierzą jednostkową stopnia n.

Symbol δ_{ij}, $i,j = 1,2,\dots,n$ nazywany jest symbolem Kroneckera. Zatem

$$I = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{n} \Bigg\} n$$

UWAGA

Mnożenie macierzy kwadratowych tego samego stopnia jest zawsze wykonalne. Zachodzi twierdzenie

TWIERDZENIE

Dla dowolnych macierzy $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ zachodzą:

1. $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ → łączność mnożenia macierzy
2. $A\cdot I = I\cdot A = A$ → macierz jednostkowa jest jedynką dla mnożenia macierzy stopnia n
3. $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$
4. $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$, $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ } rozdzielność mnożenia macierzy względem dodawania

Def. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Macierz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ taka, że

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

nazywana jest macierzą odwrotną do macierzy A i oznaczana symbolem A^{-1}. Zatem

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

→ I - macierz jednostkowa

UWAGA!!

NIE każda macierz posiada macierz odwrotną.

Ćw Sprawdzić, że macierz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ jest macierzą odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Def. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n}$.

Macierz A nazywamy

1. trójkątną górną, jeśli $a_{ij} = 0$ dla $i > j$, tzn.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. trójkątną dolną, jeśli $a_{ij} = 0$ dla $i < j$, tzn.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

3. diagonalną jeśli jest jednocześnie trójkątną górną i dolną, tzn. $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

4. symetryczną, jeśli

$$A = A^T$$

5. ortogonalną, jeśli

$$A^T = A^{-1}$$

4.1. Wyznaczniki

Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dla $k, l \in \{1,2,\dots,n\}$ niech A_k^l oznacza macierz powstałą z macierzy A poprzez skreślenie k-tego wiersza oraz l-tej kolumny, tj.

$$A_k^l = [a_{ij}]_{\substack{i\neq k\\ j\neq l}} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$$

Z każdą macierzą kwadratową A związana jest pewna liczba rzeczywista, którą oznaczać będziemy symbolem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

i nazywać wyznacznikiem tej macierzy. Dla oznaczenia wyznacznika macierzy A używa się również zapisu

$$\det A\ , \quad |A|\ , \quad |a_{ij}|_{i,j=1,\dots,n}$$

(łac. determinare = wyznaczać)

determinant = wyznacznik macierzy.
elementy wyznacznika = elementy macierzy
stopień —"— = stopień macierzy
(mówimy, że wyznacznik jest stopnia n lub, że wyznacznik ma n-wierszy i n-kolumn)

Na zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n określimy teraz funkcję wyznacznika. Definicja będzie indukcyjna.

Def. Definiujemy funkcję

$$\det_n : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ indukcyjnie w następujący sposób:

1. $n = 1$. Niech $A = [a] \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$. Wówczas

$$\det_1 [a] = a .$$

2. Przypuśćmy, że zdefiniowana jest funkcja wyznacznika dla $n-1$, tzn. funkcja $\det_{n-1}$ na zbiorze macierzy $M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$ stopnia $n-1$. Definiujemy funkcję wyznacznika dla n w sposób następujący:

$$\det_n A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det_{n-1} A_1^j .$$

Wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a według 1-go wiersza.

[Pierre Simon Laplace, Francja, 1749 - 1827]

<u>Wniosek</u>

$n = 2$, $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\det_2 A = (-1)^{1+1} a_{11} \det_1 A_1^1 + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_1^2 = a_{11} \det [a_{22}]$$
$$- a_{12} \det_1 [a_{21}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$; tzn.:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c$$

Uwaga

1. W dalszej części w miejsce oznaczenia $\det_n$ będziemy stosować zapis $\det$, pomijając liczbę n oznaczającą stopień macierzy.

2. Wyznaczniki liczy się tylko i wyłącznie z macierzy kwadratowych !!!

3. Do obliczania wyznacznika stopnia 3-go można stosować tzw. schemat Sarrusa:

[Pierre Sarrus, Francja, 1798 - 1861].

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(mnożymy odpowiednie elementy, a iloczynom przypisujemy odpowiednie znaki)

inaczej

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} - & - & - & + & + & + \end{matrix}$$

lub

$$\begin{matrix} & \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| & \\ - & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{matrix} & + \\ - & \begin{matrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} & + \\ - & & + \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot2 + 4\cdot0\cdot3 + (-4)\cdot(-1)\cdot(-2) - 3\cdot5\cdot(-4)$$

$$-(-1)\cdot0\cdot1 - 2\cdot4\cdot(-2) = 10 - 8 + 60 + 16 = 78$$

UWAGA

Dla obliczenia wyznacznika stopnia $n \geqslant 3$ można stosować rozwinięcie Laplace'a względem dowolnego wiersza lub dowolnej kolumny. Zachodzi bowiem następujące

TWIERDZENIE

1. $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_i^j$ – rozwinięcie Laplace'a w-g i-tego wiersza

2. $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_i^j$ – rozwinięcie Laplace'a według j-tej kolumny

UWAGA: W praktyce rozwijając wyznacznik metodą Laplace'a należy wybierać ten wiersz (bądź tę kolumnę), w którym (w której) występuje najwięcej zer.

Przykład.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{3+2}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} +$$

$$+(-1)^{3+3}\cdot1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{3+4}\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}}_{=0} =$$

$$= (-1)\cdot\left((-1)^{2+1}\cdot3\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\cdot5\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}\right) + (3+30+36+25) =$$

$$= (-1)\cdot(-3\cdot(-2+18) - 5(0-10)) + 94 = (-1)\cdot(-48+50) + 94 = \underline{92}.$$

4.2. Własności wyznaczników

TWIERDZENIE

1. Wyznacznik macierzy, w której jeden wiersz lub jedna kolumna składa się z samych zer jest równy zeru.
2. Wyznacznik macierzy, w której dwa wiersze lub dwie kolumny są identyczne jest równy zeru.
3. Transponowanie macierzy nie zmienia jej wyznacznika, tzn. $\det A = \det A^T$.
4. Zamiana dwóch wierszy (dwóch kolumn) zmienia znak wyznacznika na przeciwny (pozostawiając jego wartość bezwzględną niezmienioną).
5. Jeśli macierz B powstaje z macierzy A poprzez pomnożenie wszystkich elementów jednego wiersza (lub jednej kolumny) przez liczbę $c \in \mathbb{R}$, to

$$\det B = c \cdot \det A .$$

6. Wyznacznik macierzy nie zmienia swej wartości jeżeli do elementów jednego wiersza (kolumny) dodamy elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez dowolną liczbę $c \in \mathbb{R}$.

TWIERDZENIE

1. Jeśli A jest macierzą ortogonalną, to $\det A = \pm 1$.
2. Wyznacznik macierzy trójkątnej A (górnej, dolnej, diagonalnej) jest równy iloczynowi elementów na głównej przekątnej, tzn.:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn} .$$

Twierdzenie (Cauchy) !!

Jeśli $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, to

$$\boxed{\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B}$$

Wniosek: Jeśli $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ i A posiada macierz odwrotną A^{-1}, to

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

! **Wniosek:** Macierz kwadratowa A posiada macierz odwrotną w.i.t.w.g.

$$\det A \neq 0$$

Def. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Liczbę

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_i^j$$

nazywamy dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}.

Wniosek:

1. Rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza ma postać

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \ ; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Rozwinięcie Laplace'a według j-tej kolumny ma postać

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \ ; \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

4.3. Macierz dopełnień algebraicznych. Obliczanie macierzy odwrotnej.

Def. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Macierz

$$[A_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$$

nazywamy macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A. Przyjmujemy oznaczenie $[A_{ij}]_{i,j=1,\dots,n} = A_D$.

TWIERDZENIE

Niech $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ i niech $\det A \neq 0$. Wtedy istnieje macierz odwrotna A^{-1} oraz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [A_{ij}]^T_{i,j=1,\dots,n}\text{, tzn.:}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_D^T}$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

$\det A = 1 \cdot (-2) - 4 \cdot (-3) = -2 + 12 = 10 \neq 0 \Rightarrow$ macierz odwrotna A^{-1} istnieje.

Wyznaczamy elementy macierzy dopełnień algebraicznych:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det[-2] = -2$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det[4] = -4$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det[-3] = 3$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det[1] = 1$

Zatem:

$$A_D = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_D^T = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\text{, a stąd:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_D^T = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -3 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4\\ -3 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 3 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix}1\cdot(-2)+4\cdot 3 & 1\cdot(-4)+4\cdot 1\\ -3\cdot(-2)+(-2)\cdot 3 & -3\cdot(-4)+(-2)\cdot 1\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I.$$

$A^{-1}\cdot A=I$ – sprawdzić w domu.

5. RZĄD MACIERZY

Def. Niech $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i niech $k\leq\min\{m,n\}$. Macierz $B\in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ powstałą z macierzy A przez skreślenie dowolnych $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn nazywamy minorem stopnia k.

Każdej macierzy $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ możemy przyporządkować liczbę naturalną bądź zero, którą nazywać będziemy jej rzędem i oznaczać przez $\operatorname{rz}A$ (lub $\operatorname{rank}A$)

Def. Niech $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień spośród stopni minorów o niezerowym wyznaczniku w macierzy A

Wnioski

1. $\operatorname{rz}A\leq\min\{m,n\}$
2. $\operatorname{rz}A\geq k$ w.i.t.w.g istnieje minor stopnia k o wyznaczniku różnym od zera
3. $\operatorname{rz}A\leq k$ w.i.t.w.g. każdy minor o wyznaczniku różnym od zera ma stopień mniejszy lub równy k.

Przykład

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & 1\\ -5 & 2\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$\operatorname{rz}A\leq\min\{3,2\}\Rightarrow\operatorname{rz}A\leq 2$

$\operatorname{rz}A=2$ gdyż istnieje minor st. 2-go o niezerowym wyznaczniku, np. $M=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\det M\neq 0$

5.1. Własności rzędu macierzy

Rząd macierzy $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ nie zmieni się, jeśli

1. macierz A transponujemy
2. wykreślimy wiersz (kolumnę) złożoną z samych zer
3. dokonamy przestawienia wierszy (kolumn)
4. wiersz (kolumnę) pomnożymy przez niezerową liczbę
5. do wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony (ą) przez liczbę rzeczywistą.

TWIERDZENIE

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Wówczas macierz A posiada macierz odwrotną w.i.t.w.g. $rz\,A = n$.

TWIERDZENIE (Sylwester)

Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.
Wówczas

$$rz(A\cdot B) \le \min\{rz\,A\,;\ rz\,B\}$$

[James Joseph Sylvester, Anglia, 1814-1897]

UWAGA: W nierówności w twierdzeniu Sylwestera może zajść nierówność ostra. Przykład:

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ rz\,A = 1 \\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ rz\,B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \min\{rz\,A, rz\,B\} = 1$$

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ rz(A\cdot B) = 0$$

Przykład

M nr 17

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}); \quad rA \le 3$$

tu można wpisać zero

$$rA = r\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ + \end{matrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} =$$

$\cdot(-4)$ +, $\cdot(-7)$ +, $\cdot(-1)$

$$= r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\cdot(-1)$ +, +, $\cdot(-2)$; $\cdot(-1)$

$$= r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = 3$$

tu można wpisać zero

Przykład

(M nr 17)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad rzA \leq 3$$

tu można wpisać zero

$$rzA = rz\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ + \end{matrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} =$$

$\cdot(-4)$, $\cdot(-7)$, $\cdot(-1)$, $+$

$$= rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\cdot(-1)$, $\cdot(-2)$, $+$, $+$; $\cdot(-1)$

$$= rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = 3$$

tu można wpisać zero

Ćwicz. Niech $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wykazać, że

(M16)

1. $(A^{-1})^{-1} = A$ (jeśli A^{-1} istnieje)
2. $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
4. Macierze $A\cdot A^T$, $A^T\cdot A$ są symetryczne.
5. Macierz $A + A^T$ jest symetryczna
6. Jeśli A jest symetryczna i B jest ortogonalna, to $B^{-1}AB$ jest macierzą symetryczną
7. Jeśli A i B są ortogonalne, to $A\cdot B$ jest ortogonalna