Liczby zespolone

1. Udowodnij, że jeśli $z \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $\varphi \in \mathbb{R}[x]$ (o współczynnikach rzeczywistych) to liczba $\bar{z}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

2. Wyznacz część rzeczywistą i urojoną iloczynu
$$w = (1+z)(1+z^2)(1+z^3)\cdot\ldots\cdot(1+z^{100})$$
gdzie $z = e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

3. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z spełniające równość
$$(z+2i)^4 = \frac{|z|^8}{64}.$$

4. Liczby z_1 i z_2 są różnymi zespolonymi rozwiązaniami równania
$$z^2 - (1+2i)z - 1 + 3i = 0.$$
Wyznacz część rzeczywistą i urojoną liczby
$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)^{2015}.$$

5. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że

$$\left| \frac{1+z}{1-i\bar{z}} \right| = 1.$$

6. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z będące rozwiązaniami równania

$$\bar{z}^2 z^6 = 256.$$

7. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z spełniające równość

$$(z+i)^4 = \frac{|z|^8}{81}$$

8. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n dla której

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right)^n = 0.$$

9. Dla jakich liczb całkowitych k równanie

$$|z-(1+i)^k| = z$$

ma rozwiązanie w dziedzinie zespolonej?

10. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z będące rozwiązaniami równania

$$(z+i)(\bar{z}-i)(iz-1)^3 = 64$$

11. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z będące rozwiązaniami równania

$$z^3 = (1+iz)^3$$

12. Podaj interpretację geometryczną następujących podzbiorów płaszczyzny zespolonej

a) $\{z:\ (z-1+2i)(\bar{z}-1-2i) = 4\}$

b) $\{z:\ |z-a| = |z-b|\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$.

13. Podaj interpretację geometryczną następujących podzbiorów płaszczyzny zespolonej

a) $\{z : 0 \leq Re(iz) < 1\}$

b) $\{z : \left|\frac{z+1}{z-1}\right| < 1\}$.

14. Wyznacz wszystkie liczby zespolone z spełniające

$$z^3 + |z|^2 + z = 0$$

15 Wyznacz wszystkie liczby zespolone z takie, że liczba zespolona

$$\frac{1+z}{1-z}$$

jest rzeczywista

16. Dane są liczby zespolone : $x = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ oraz $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$. Czy prawdą jest, że

$$2^{2015} \cdot |x^{2015} \cdot \bar{y}| = 1 \quad ?$$

l. zespolone

17. Dane są liczby zespolone : $x = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ oraz $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. Czy prawdą jest, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\mathrm{Re}\left((xy)^k\right) = 0$?

18. Liczby z_1, z_2 są różnymi pierwiastkami zespolonymi równania

$$10z^2 + (-2-2i)z + (1-\sqrt{3}i) = 0.$$

Wyznacz część rzeczywistą i urojoną liczby

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)^{2018}$$

19. Rozwiązać równanie

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0$$

20 Oblicz $z_1^n + z_2^n$, jeżeli n jest liczbą całkowitą oraz

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

l. zespol. + macierze

21. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone z, dla których prawdziwa jest równość

$$\det\begin{bmatrix} z^2-i & 3+4i \\ 1 & z^2-i \end{bmatrix} = 0.$$

22. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone λ ~~z~~, dla których prawdziwa jest równość

$$\det(A-\lambda I)=0,$$

gdzie A jest macierzą postaci

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ i & 2 \end{bmatrix}$$

natomiast I jest macierzą jednostkową.

23. Niech z_1, z_2, z_3 będą rozwiązaniami równania

$$z^3-8z^2+(17-3i)z+(-10+3i)=0.$$

Nie ~~wyzn~~ obliczając z_1, z_2, z_3 wyznaczyć wartości wyrażenia: a) $z_1+z_2+z_3$

b) $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$

c) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

d) Korzystając z a), b) wyznaczyć wartość wyrażenia

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$$

24. Wiedząc, że liczby z_1, z_2, z_3 są pierwiastkami równania

$$z^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

wyprowadzić wzory: ~~…~~

a) $z_1 + z_2 + z_3 = -b$

b) $z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 + z_2 z_3 = c$

c) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -d$

Korzystając z wyprowadzonych wzorów b), c) wyznaczyć wartość wyrażenia

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}.$$

dla równania z zadania 23.

25. Niech z_1, z_2, z_3 będą pierwiastkami równania $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$,

$a \neq 0$.

Wyprowadzić wzory:

a) $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{-b}{a}$,

b) $z_1 \cdot z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{c}{a}$,

c) $z_1 z_2 z_3 = -\frac{d}{a}$.

Korzystając z wyprowadzonych wzorów wyznaczyć wartość wyrażenia

$$\left(\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2}\right)^n$$

dla równania

$$(5+3i)z^3 + (3-i)z^2 + (3+i)z + 1+i = 0,$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.

26. Rozwiązać równanie podane w zadaniu 23. Obliczyć ponadto

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2,$$

gdzie z_1, z_2, z_3 są rozwiązaniami równania podanego w zadaniu 23.