

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

1. Definicja pochodnej

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$. Założymy, że istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że $x_0 \in U \subset D_f$.
Jeśli $x \in U$, to liczbę

$$\Delta x = h := x - x_0$$

nazywamy przyrostem argumentu. Liczbę

$$\Delta f = \Delta y := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

nazywamy przyrostem funkcji w punkcie x_0 . Stosunek

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 .

Definicja Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę (o ile istnieje)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Interpretacja geometryczna

Pochodna $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta nachylenia prostej stycznej w punkcie $(x_0, f(x_0))$ do wykresu funkcji f w stosunku do osi OX . Stąd równanie tej prostej stycznej jest postaci

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

gdzie $y_0 = f(x_0)$. Oczywiście $D_{f'} \subseteq D_f$.

Przykład $f(x) = 2x^2 + 5x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$

Mamy

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_0+h)^2 + 5(x_0+h) - 1 - (2x_0^2 + 5x_0 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (4x_0 + 2h + 5) = 4x_0 + 5.$$

Pochodne napisanych rzedo

(3)

Jeśli funkcja $f': x \mapsto f'(x)$ ma pochodną, to nazywamy ją pochodną rzedu drugiego i oznaczamy przez f'' . Zatem

$$f'' = (f')'$$

Postępując rekurencyjnie definiujemy pochodną rzedu n :

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Ponadto

$$D_{f^{(n)}} \subseteq D_{f^{(n-1)}} \subseteq \dots \subseteq D_{f'} \subseteq D_f.$$

2. Własności pochodnej

Twierdzenie. Głazda funkcja, która ma pochodną w jakimś punkcie jest ciągła w tym punkcie.

Twierdzenie. Jeśli funkcje $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ mają pochodne w zbiorze U , to funkcje

$$f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g}, g \neq 0$$

mają pochodne w U oraz

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \quad , \quad (4)$$

$$(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g' \quad ,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2} \quad .$$

Twierdzenie Niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli funkcja f ma pochodną $f'(x_0)$ w punkcie x_0 , zaś funkcja g ma w punkcie $y_0 = f(x_0)$ pochodną $g'(y_0)$, to złożenie $g \circ f$ ma pochodną w punkcie x_0 , przy czym

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Twierdzenie Jeśli funkcja f jest ściśle monotoniczna i ciągła w otoczeniu punktu x_0 i istnieje pochodna $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja odwrotna f^{-1} ma pochodną w punkcie $y_0 = f(x_0)$, przy czym

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad .$$

Wzory podstawowe

$$1. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$$

$$\bullet (c)' = 0, \quad c = \text{const}$$

$$\bullet \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

$$\bullet (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0$$

$$\bullet (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\bullet (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$$2. (\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$3. (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$a > 0, a \neq 1$$

$$\bullet (e^x)' = e^x$$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$x > 0$
 $a > 0, a \neq 1$

• $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

5. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$x \in (-1, 1)$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$x \in (-1, 1)$

$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

3. Wybrane twierdzenia rachunku różniczkowego

Definicja Niech $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, U - jest zbiorem otwartym i niech $x_0 \in U$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0

1. maksimum lokalne, jeśli istnieje

$r > 0$ takie, że przedział $(x_0 - r, x_0 + r) \subset U$ oraz

oraz

(9)

$$\bigwedge_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} f(x) \leq f(x_0)$$

2. minimum lokalne, jeśli istnieje $r > 0$

takie, że przedział $(x_0 - r, x_0 + r) \subset U$ oraz

$$\bigwedge_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} f(x_0) \leq f(x)$$

Jeśli w obu powyższych nierównościach spełnione są nierówności $f(x) < f(x_0)$ lub $f(x_0) < f(x)$ dla $x \neq x_0$, to mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 maksimum lub minimum lokalne **ktas'cine**.

Maksima i minima lokalne nazywane są **ekstremami lokalnymi**.

Przykład $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$, $x \in \mathbb{R}$

W punktach $x = -1$, $x = 1$ funkcja ma minima lokalne ktas'cine równe 0 i jest to wartość najmniejsza. W punkcie $x = 0$ funkcja ma maksimum lokalne. Nie przyjmuje wartości

maxymalnej.

⑧

Przykłady

Inne przykłady na dotychczasowe zadanie

TWIERDZENIE (FERMATA) - (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeśli funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne i jest w tym punkcie różniczkowalna, to

$$f'(x_0) = 0.$$

UWAGI

1. Styczne do krzywej $y=f(x)$ w punkcie ekstremum lokalnego jest równoległa do osi Ox .
2. Punkty, w których pochodna funkcji jest równa zero nazywamy punktami krytycznymi.
3. Warunek $f'(x_0)=0$ jest warunkiem koniecznym na istnienie ekstremum lokalnego, nie jest natomiast warunkiem wystarczającym. Np. dla funkcji $f(x)=x^3$ mamy $f'(x)=3x^2$, a zatem $f'(0)=0$. Ale w punkcie $x=0$ funkcja nie ma ekstremum lokalnego, tylko tzw. punkt przegięcia.

Twierdzenie Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ⑨

będzie funkcją ciągłą na $[a, b]$ i różniczkową na (a, b) . Wtedy

1. Jeśli $\bigwedge_{x \in (a, b)} f(x) = 0$ to f jest funkcją **stałą** na $[a, b]$.
2. Jeśli $\bigwedge_{x \in (a, b)} f'(x) < 0$ to f jest **malejącą** na $[a, b]$.
3. Jeśli $\bigwedge_{x \in (a, b)} f'(x) > 0$ to f jest **rosnącą** na $[a, b]$.

UWAGA Warunek $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$ jest w warunkach wystarczającym na to, aby funkcja f była rosnąca na $[a, b]$, zaś warunek $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$ jest w warunkach wystarczającym na to, aby funkcja f była malejąca na $[a, b]$. Warunki te nie są konieczne. Na przykład funkcja $f(x) = \sqrt[3]{x}$ jest ściśle rosnąca na \mathbb{R} , ale nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$. Z kolei funkcja $f(x) = x^3$ jest ściśle rosnąca na \mathbb{R} , ale $f'(0) = 0$.
Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie Jeśli funkcja f jest różniczkowalna na (a, b) oraz jest

1. jest **rosnąca** na (a, b) , to $\bigwedge_{x \in (a, b)} f'(x) \geq 0$,
2. **malejąca** na (a, b) , to $\bigwedge_{x \in (a, b)} f'(x) \leq 0$.

Przykład Zbadamy monotoniczność i uznaczymy ekstremum lokalne funkcji

$$f(x) = x \cdot e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mamy:

$$f'(x) = e^x + x e^x = (1+x)e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Stąd $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

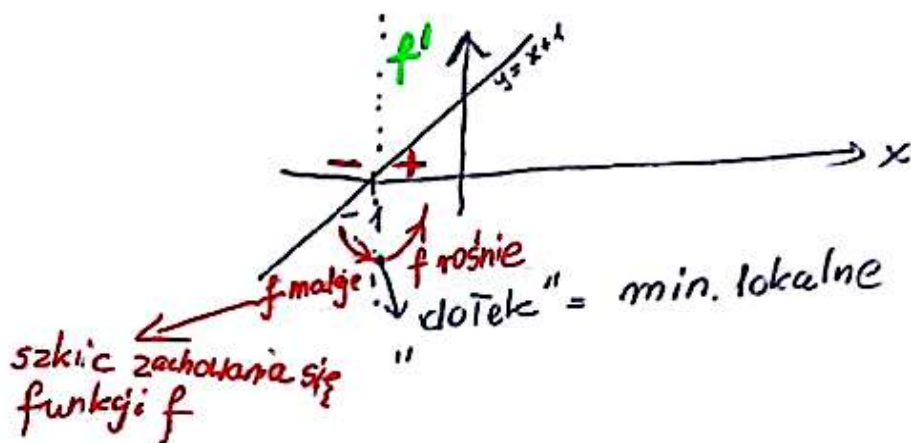
W punkcie krytycznym $x=-1$ może istnieć (lece nie musi) ekstremum lokalne funkcji.

Aby sprawdzić czy tak jest w istocie, zbadamy czy zmienia się znak pochodnej (monotonność funkcji) przy przejściu przez punkt $x=-1$.

Mamy

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, +\infty) - \text{funkcja } f \text{ rośnie} \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) - \text{funkcja } f \text{ maleje} \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = -1} \end{cases} \quad (11)$$

punkt krytyczny, w którym funkcja f ma minimum lokalne



← Na rysunku szkieł, jak zmienia się znak f'

Jwierzozienie (Reguła de L' Hospitala).

Niech $D = (a, b) \setminus \{x_0\}$, gdzie x_0 jest punktem skupienia przedziału (a, b) . Niech $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ bęą różniczkowalne na D i $g'(x) \neq 0$ dla $x \in D$. Załozimy ponadto, że

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty \text{ lub } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty.$$

oraz istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Przy powyższych założeniach istnieje granica ⁽¹²⁾
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i zachodzi równość:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

UWAGA Reguła de L'Hospitala pozostaje prawdziwa jeśli granicę w x_0 zastąpimy granicami w jednostronnymi w x_0 lub granicami w $+\infty$ lub w $-\infty$.

UWAGA Reguła de L'Hospitala pozwala obliczać granice funkcji w przypadku symboli nieoznaczonych $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

UWAGA Jest 7 symboli nieoznaczonych:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [0 \cdot \infty], [\infty - \infty], [0^0], [\infty^0], [1^\infty]$$

- W przypadku dwóch pierwszych - stosujemy regułę de L'Hospitala.
- Pozostałe symbole można przekształcić tak, że w otrzymanych wyrażeniach występuje $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ i wtedy można zastosować regułę de L'Hospitala.

Prüfung

0/0

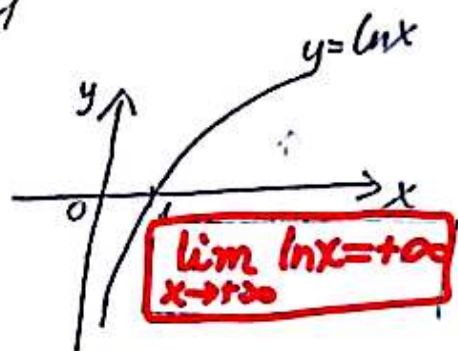
[0/0] 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \stackrel{[0/0]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1 \quad \text{cos 0 = 1}$$

[∞/∞] 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$$



[0·∞] 3

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = [0 \cdot (-\infty)]$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right]$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

[∞-∞] 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x} =$$

$= \left[\frac{0}{0} \right]$ jeszcze raz stosujemy regułę de L'Hospitale

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x \cdot \cos x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\underbrace{\cos x}_1 + 1 \cdot \underbrace{\cos x}_1 + \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\rightarrow 0}}$$

$$= \boxed{\sin 0 = 0} \cdot \boxed{\cos 0 = 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

5) SYMBOLE $[0^0], [\infty^0], [1^\infty]$

Korzystamy z własności:

- | | |
|------------------------------------|---------|
| 1) $y = e^{\ln y}$ | $y > 0$ |
| 2) $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$, | $x > 0$ |

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} &= [(\infty)^0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(x^{\frac{1}{x}})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]} \stackrel{H}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$