EF - DI

CCO - DI, przygotowanie do kolokwium 1.

ML - DU

ME - DU

Przygotowanie do kolokwium z liczb zespolonych i macierzy

1. Wyznaczyć postać trygonometryczną, wykładniczą liczby z

a) $z = 2 + 2i$ b) $z = 1 - \sqrt{3}i$

c) $z = -1 + \sqrt{3}i$ d) $= -\sqrt{3} - i$

2. Wyznaczyć postać trygonometryczną, wykładniczą, algebraiczną (tj. $z = a + bi$) liczby z

a) $z = \left(\dfrac{2+2i}{1-\sqrt{3}i}\right)$ b) $z = \left(\dfrac{2+2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

3. Wyznaczyć wszystkie pierwiastki stopnia n liczby z i podać ich interpretację geometryczną

a) $z = i$, $n = 3$

b) $z = i$, $n = 4$

c) $z = 1$, $n = 3$

d) $z = 1$, $n = 4$

e) $z = 1 + i$, $n = 3$

f) $z = \dfrac{2+2i}{1-\sqrt{3}i}$, $n = 3$

4.* Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyprowadzić wzór na

a) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$

b) $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$

c)*** $\sin(n\alpha)$, $\cos(n\alpha)$

5. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{C}$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ -12{,}5 & m+1 \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa

6. Wyznaczyć liczby $x \in \mathbb{R}$, dla których spełniona jest nierówność

$$\det A \geq 0,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} x+2 & 1 & 2 \\ 2x-2 & x-1 & -1 \\ 3x & x & x+2 \end{bmatrix}$$

7. Obliczyć wyznacznik macierzy X spełniającej równość

$$A^{-1} X A = B + 2A^T,$$

gdzie

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>Wskazówka</u>. Skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego.

8. Obliczyć $\sqrt{-3+4i}$

9. Rozwiązać równanie

$$z^3 - (2+2i)z^2 + (14+15i)z - 13 - 13i = 0$$

10. Obliczyć wyznacznik macierzy X wiedząc, że

$$A^{-1} X A = B^T$$

oraz $\det B = 3$, natomiast A jest dowolną macierzą odwracalną.

11.* Obliczyć wyznacznik macierzy X wiedząc, że

$$A \cdot X \cdot A^{-1} = 2B^T,$$

gdzie A, B są macierzami kwadratowymi stopnia n takimi, że $\det A \neq 0$ oraz $\det B = 3$

12.* Obliczyć X^3, gdzie

$$A^{-1} X A = B$$

przy czym

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wskazówka. Wyznaczyć macierz X i wykazać, że $X^n = AB^nA^{-1}$. Skorzystać z powyższej własności dla $n=3$ obliczając B^3 oraz A^{-1}.

13*. Wyznaczyć macierz $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ z równania

$$A X^{-1} A = A^2,$$

gdzie $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ jest dowolną macierzą odwracalną stopnia 2-go.

14.* Wyznaczyć macierz $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ z równania

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}^2$$

Wskazówka. Zauważyć, że równanie jest postaci

$$A X^{-1} A = -A^2$$

oraz $\det A \neq 0$.

15. Rozwiązać układ równań dwiema metodami: stosując wzory Cramera oraz wykorzystując macierz odwrotną:

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = -1 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

16. Za pomocą twierdzenia Kroneckera-Capellego sprawdzić, ~~że~~ czy układ równań liniowych jest niesprzeczny. Jeśli tak, rozwiązać układ równoważny dwiema metodami: stosując wzory Cramera oraz wykorzystując macierz odwrotną

a)
$$\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ -3x + 6y - 2z + 5t = -2 \\ -2x + 4y - z + 4t = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -3x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

17. Rozwiązać nierówność

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & x & 1 \\ 5 & -2 & 0 & x-1 \\ 5 & -1 & x-1 & x \end{vmatrix} \leq 2x$$

18. ~~Dla~~ Rozwiązać układ równań w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}.$$

19. Wyznaczyć macierz X z równania

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - 3I + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}^T$$

20. Wyznaczyć macierz X z równania

$$\left(X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right)^T - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X^T$$

21. Zadania 18 – 26 z listy zadań na ocenę bdb z liczb zespolonych.

22. Wyznaczyć macierz X z równania

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. Obliczyć wyznaczniki stopnia $n > 2$

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_ny_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

Wskazówka. Np. Odjąć ostatni wiersz od pozostałych. Z kolejnych wierszy wyłączyć przed wyznacznik wspólne czynniki.

25. Rozwiązać równanie

a) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$

Wsk. Przedstawić $x^4 + 6x^3 + 9x^2$ jako kwadrat pełnej sumy.

b) $(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0$

26. Wyznaczyć $\lambda \in \mathbb{R}$ z równania

$$\det(A - \lambda \underline{I}) = 0,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową oraz

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ Odp. $\lambda \in \{0, 7\}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ Odp. $\lambda \in \{-1, 3 \pm \sqrt{3}\}$

27. Wyznaczyć $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniające równanie

$$\det(A - \lambda \underline{I}) = 0,$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>UWAGA</u>. Liczbę λ spełniającą równanie $\det(A - \lambda \underline{I}) = 0$ nazywamy <u>wartością własną</u> macierzy A.

28. Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+1 & b \\ 1 & a & b+1 \end{bmatrix}$$

jest nieosobliwa?

29. Obliczyć $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos x \\ \cos x & 1 & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & 1 \end{vmatrix}$

Wskazówka. Można wykorzystać wzory:

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
  $= 2\cos^2 x - 1$
  $= 1 - 2\sin^2 x$

30. Rozwiązać układ równań stosując wzory Cramera.

a) $\begin{cases} (2-3i)z_1 + (7+i)z_2 = 18-3i \\ (5+4i)z_1 - 3i\, z_2 = -7-i \end{cases}$

Odp. $z_1 = i$, $z_2 = 2-i$

b) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (2-i)z_2 = 2-2i \\ (1-i)z_1 - (3+i)z_2 = -3+3i \end{cases}$

Odp. $z_1 = 2+i$, $z_2 = \frac{7}{5} - \frac{9}{5}i$

31. Wyznaczyć $z \in \mathbb{C}$ z równania

$$\begin{vmatrix} (2-i\sqrt{2})z & i \\ 5iz-2i+\sqrt{2} & z \end{vmatrix} = 0$$

Odp. $z \in \left\{ \frac{1}{3} + \frac{i\sqrt{2}}{6} ; -2-i\sqrt{2} \right\}$

32. Dla jakich wartości parametru a układ równań jest cramerowski?

a) $\begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ x - ay - 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ Odp. $a \neq \frac{5}{2}$

b) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$ Odp. $a \neq -2 \wedge a \neq 1$

32. W zależności od wartości $k \in R$ zbadać rozwiązalność układu równań. W przypadku rozwiązalności znaleźć wszystkie rozwiązania

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ kx + (2k-2)y = 8 \\ (k+2)x + 9y = 3k \end{cases}$ Odp Gdy $k=4$, $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3}(2-t) \end{cases}$, $t \in R$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = k \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = k \\ x_1 + kx_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$ Odp Gdy $k=3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = k \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3k \\ x_1 + 4x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

<u>Odp.</u> Gdy $k=1$, $x_1 = \frac{24}{5}t$, $x_2 = \frac{22}{5}t - 1$,
$x_3 = -\frac{4}{5}t$, $x_4 = t$, $t \in R$
Gdy $k \neq 1$ układ sprzeczny

33. Korzystając z twierdzenia Kroneckera-Capelli'ego zbadać rozwiązalność układów równań. W przypadku rozwiązalności znaleźć wszystkie rozwiązania.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ <u>Odp.</u> $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 4x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$ <u>Odp.</u> $x_1 = \frac{24}{5}t$,
$x_2 = \frac{22}{5}t - 1$
$x_3 = -\frac{1}{5}t$, $x_4 = t$,
$t \in R$.

34. Stosując podstawowe twierdzenia o wyznacznikach obliczyć następujące wyznaczniki

a) $\begin{vmatrix} 202 & 44 & 122 \\ 250 & 55 & 153 \\ 50 & 11 & 31 \end{vmatrix}$ <u>Odp.</u> 44

<u>Wsk.</u> Np.: Z drugiej kolumny wyłączyć 11, potem do 1° kolumny dodajemy 2° pomnożoną przez -50, a do 3° drugą pomnożoną przez -30 itd.

b) $\begin{vmatrix} 27 & 9 & 9 \\ 62 & 23 & 18 \\ 35 & 14 & 7 \end{vmatrix}$ Odp. -126

<u>Wsk.</u> Od drugiego wiersza odejmujemy sumę pozostałych, itd... (...wyłączyć 9 z 1° wiersza, 2 z drugiego w., 7 z 3° wiersza)

c) $W = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & a^2 & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{vmatrix}$, gdzie $a = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$

<u>Odp.</u> 0

Wskazówka. Sprawdzić, że $W = -(a^3 - 1)^2$, potem obliczyć a^3 wyznaczając postać np. trygonometryczną liczby a i stosując wzór de Moivre'a (tj. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$).