Granica funkcji

1. Granica funkcji w punkcie

Def. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Punkt $a \in \mathbb{R}$ nazywamy punktem skupienia zbioru A jeśli istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$$(1) \quad \left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x_n \in A \wedge x_n \neq a \right) \wedge \lim_{n \to \infty} x_n = a .$$

Definicja 1.2 (Heine) Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru $A \subset \mathbb{R}$. Niech $f: A \to \mathbb{R}$. Mówimy, że punkt $b \in \mathbb{R}$ jest granicą funkcji f w punkcie a jeśli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ spełniającego warunek (1) zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b .$$

Piszemy wówczas

$$\lim_{x \to a} f(x) = b .$$

JWIERDZENIE

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right) \Longleftrightarrow \left(\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in A} 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon\right).$$

(2)

Z uwagi na prostotę twierdzenie równoważne (2) można przyjąć jako definicję granicy funkcji w punkcie a. Mówimy wtedy, o definicji granicy w sensie Cauchy'ego.

2. Własności granic

JWIERDZENIE. Jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = b$, to

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |b|.$$

Twierdzenie Jeśli $\lim_{x\to a} f_1(x) = b_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = b_2$, to

1) $\lim_{x\to a} \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = b_1 + b_2$,

2) $\lim_{x\to a} \left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = b_1 \cdot b_2$,

3) $\left(\left(\bigwedge_x f_2(x) \neq 0\right) \wedge b_2 \neq 0\right) \Rightarrow \lim_{x\to a} \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{b_1}{b_2}$.

TWIERDZENIE (o przechodzeniu do granicy w nierówności słabej)

Niech dla $x \in A$ zachodzi $f(x) \leq g(x)$ oraz $\lim_{x \to a} f(x) = b_1$, $\lim_{x \to a} g(x) = b_2$. Wtedy

$$b_1 \leq b_2$$

WNIOSEK („tw. o trzech funkcjach")

Jeśli dla $x \in A$ zachodzi

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

oraz istnieją granice $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$, przy czym $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = c$, to istnieje granica $\lim_{x \to a} h(x)$ i zachodzi

$$\lim_{x \to a} h(x) = c.$$

3. Pozostałe granice

I Granice nieskończone

1. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$
2. $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

Ad 1 (Definicja Heinego)

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

oznacza, że dla każdego ciągu $\{x_n\}$ spełniającego warunki (1) zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty .$$

Ad 2. analogicznie

II Granice w nieskończoności i granice jednostronne

1. Granica w $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b,$$

2. Granica w $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b,$$

3. Granica lewostronna w punkcie a:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b,$$

4. Granica prawostronna w punkcie a:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b$$

5. Granica $-\infty$ w $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

6. Granica $+\infty$ w $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

7. Granica $-\infty$ w $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

8. Granica $+\infty$ w $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

9. Granica lewostronna $-\infty$ w punkcie a:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty,$$

10. Granica lewostronna $+\infty$ w punkcie a:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty,$$

11. Granica prawostronna $-\infty$ w punkcie a:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty ,$$

12 - Granica prawostronna $+\infty$ w punkcie a:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty .$$

<u>Ad 1</u> Zakładamy, że zbiór A jest nieograniczony z dołu. (Definicja Heinego)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

oznacza, że dla każdego ciągu $\{x_n\}$ spełniającego warunki ~~(1)~~ (1) ($a = -\infty$) zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b .$$

KU PAMIĘCI :

1. Jeśli $k > 0$, to

$$\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty ,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0 .$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

5. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

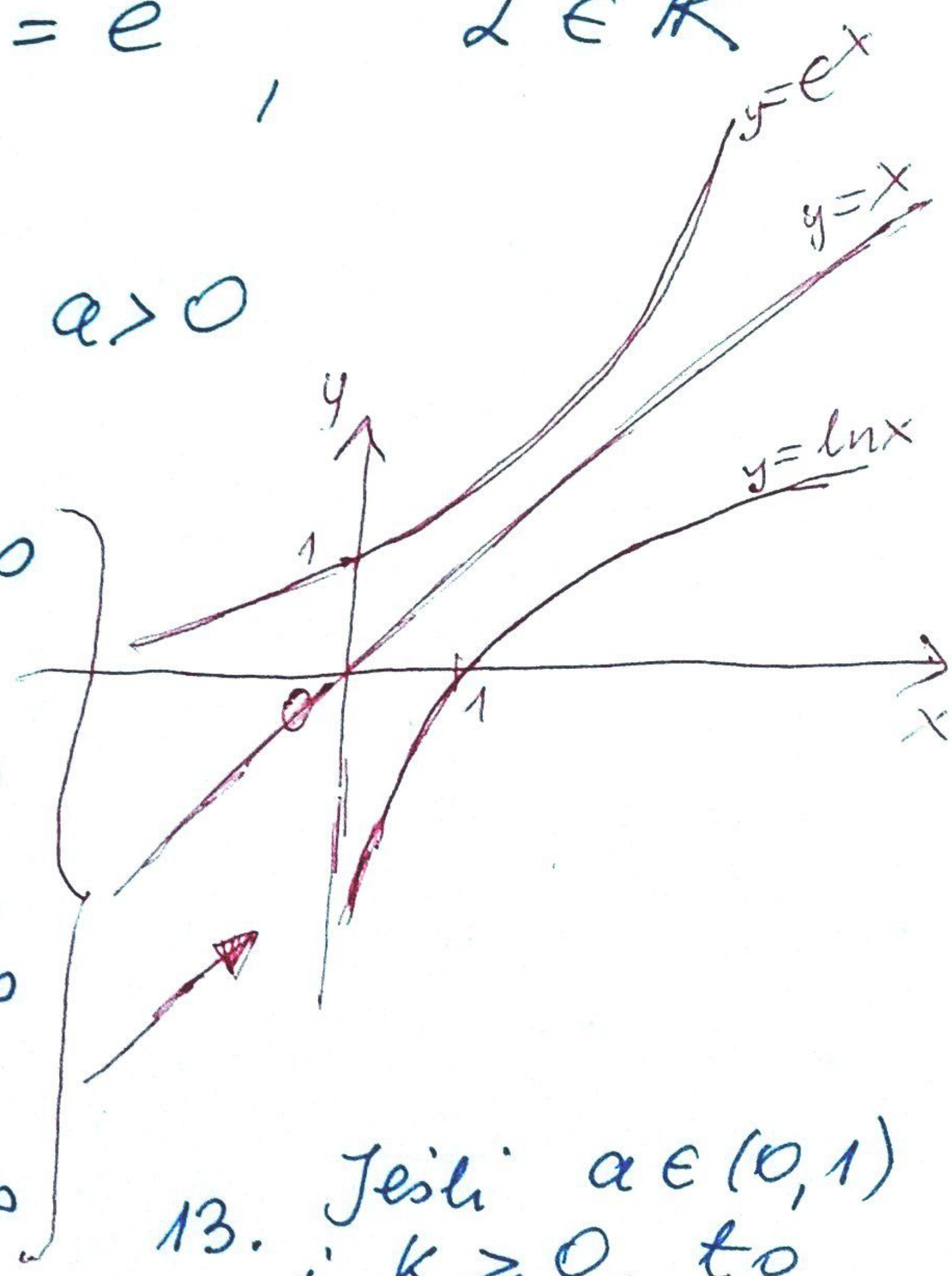
7. $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1, \quad a > 0$

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

9. $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$



12. $\lim\limits_{x \to 0+} (x \cdot \ln x) = 0$

13. Jeśli $a \in (0,1)$ i $k \geq 0$, to $\lim\limits_{x \to +\infty} (a^x x^k) = 0$.