1. Niech

$$W_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Obliczyć W_2, W_3, W_4, W_5. Znaleźć wzór na W_n. (Zapisywać wszystkie operacje wykonywane na kolumnach, wierszach)

Wsk. Np. 1) Ostatnią kolumnę odjąć od poprzednich 2) dodać kolejno: pierwszy, drugi, trzeci, ..., (n-1) pierwszy wiersz do ostatniego w celu otrzymania macierzy trójkątnej górnej.

2. Niech dane będą macierze

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Obliczyć $A \cdot B$, $B \cdot A$, $\det A$, $\det B$.
Sprawdzić na podanym przykładzie, że prawdziwe jest <u>twierdzenie Cauchy'ego</u>, tj. że zachodzi

$$\det(B \cdot A) = \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

3. Obliczyć wyznacznik

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

<u>Wsk.</u> Dodać 1° wiersz do pozostałych. Zaproponowany wzór na W_n udowodnić indukcyjnie

4. Obliczyć wyznacznik

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

Wskazówka. Skorzystać z własności wyznaczników, np. odjąć ostatnią kolumnę od pozostałych. Zaproponowany wynik udowodnić indukcyjnie.

5. Uzasadnić, że na ogół

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Podać przykłady macierzy kwadratowych A, B takich, że

a) spełniona jest równość

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

b) powyższa równość nie zachodzi.

4. Dla danych macierzy A, B sprawdzić równość

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maciecze

5. Korzystając z twierdzenia Cauchy'ego (patrz np. zad 2.) oraz z własności $\det A^T = \det A$ obliczyć $(\det A)^2$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & -3 \\ -3 & -4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Wskazówka
1. obliczyć $A \cdot A^T$
2. obliczyć $\det(A \cdot A^T)$
3. Skorzystać z twierdz. Cauchy'ego, tj. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

6. Korzystając z definicji macierzy odwrotnej oraz z twierdzenia Cauchy'ego (patrz. np. zad. 2) podać wzór na wyznacznik

$$\det(A^{-1}).$$

obliczyć wyznacznik macierzy odwrotnej do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

WSKAZÓWKA 1
1. obliczyć $\det A$ (patrz zad 4)
2. Wyprowadzić wzór $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Aby obliczyć $\det A$ można np. odjąć ostatni wiersz od pozostałych, dalej odjąć pierwszy wiersz od pozostałych itd. Albo działać na kolumnach (odjąć ostatnią kolumnę od pozostałych).

7. Niech A będzie macierzą (diagonalną) postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

a) obliczyć A^2, A^3, A^4, A^5, podać wzór na A^k dla dowolnego $k = 1, 2, \dots$

b) korzystając z punktu a) obliczyć B^7, gdy

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Dane są macierze A i B. Znaleźć macierz X spełniającą równość

$$A^{-1} \cdot X \cdot A = B,$$

a następnie obliczyć potęgę X^5, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wskazówka. Z podanej równości wyznaczyć $X = ABA^{-1}$, a następnie wyprowadzić wzór

$$X^5 = AB^5A^{-1}$$

wykonać mnożenie $X \cdot X \cdot X \cdot X \cdot X = (ABA^{-1})(ABA^{-1}) \ldots$ itd

Dla wyznaczenia B^5 skorzystać z zadania 7. (tj. jeśli $B = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$, to $B^k = \begin{bmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{bmatrix}$)

~~8,~~

9. Treść jak w zad. nr 8 dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Mając dane macierze A i B znaleźć macierz X spełniającą równanie

$$A^{-1} X A = B,$$

a następnie obliczyć wartość wielomianu $f(X) = X^5 + 2X^4 + X + I$,

jeśli
$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

natomiast I jest macierzą jednostkową.

WSKAZÓWKA 1) Obliczyć B^2, B^3, B^4, B^5 2) obliczyć A^{-1}
3) Obliczyć $f(B)$ i wykazać, że
$f(X) = A f(B) A^{-1}$ (gdyż $X=ABA^{-1}$,
a stąd $X^n = AB^nA^{-1} \Rightarrow f(X) = AB^5A^{-1} + 2AB^4A^{-1} + ABA^{-1} + I = A(\ldots\ldots)A^{-1} =$ itd)

11. Treść podobna jak w zadaniu nr 10 dla
$$f(X) = (X^4 + 2X^3 + 2I)^2$$

~~$A = {}^{-1}$~~ macierze A, B - jak w zadaniu nr 10.

WSKAZÓWKA 1) Patrz wskazówka do zadania nr 10.
2) $X = ABA^{-1} \Rightarrow X^n = AB^nA^{-1}$ - udowodnić to.
Stąd $f(X) = (X^4+2X^3+2I)^2 = (AB^4A^{-1} + 2AB^3A^{-1} + 2AA^{-1})^2 =$
$= (A(B^4+2B^3+2I)A^{-1})^2 = A\underbrace{(\ldots)^2}_{f(B)}A^{-1}$.
Zatem
(*) $\boxed{f(X) = Af(B)A^{-1}}$
3) obliczyć B^2, B^3, B^4, a następnie $f(B)$
4) Nie obliczając A^{-1} wyznaczyć $f(X)$ ze wzoru (*)

12. Wyznaczyć macierz X z równania

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2$$

Wskazówka. Zauważyć, że równanie powyższe można zapisać w postaci

$$A X^{-1} A = -A^2$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

13. Wyznaczyć zbiór

$$V = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : A^2 = A \right\},$$

gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi.

14. Rozwiązać nierówność

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (5-x^2) & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & (5-x^2) & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \geq 0.$$

15. Rozwiązać układ równań dwiema metodami: stosując wzory Cramera oraz wykorzystując macierz odwrotną

$$\begin{cases} 2x - y - t = -3 \\ x + y + t = 0 \\ 4x - 5y - 3t = 7 \end{cases}$$

16. Treść taka jak w zadaniu 15. dla układu

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

17. Za pomocą twierdzenia Kroneckera–Capelli'ego sprawdzić czy układ równań liniowych jest niesprzeczny. Jeśli tak, rozwiązać układ równoważny dwiema metodami:

stosując wzory Cramera oraz wykorzystując macierz odwrotną:

$$\begin{cases} x-2y+z-u=-1 \\ -2x+4y+2z-3u=2 \\ -3x+6y+z-2u=3 \end{cases}$$

18. Treść jak w zadaniu 17, układ:

$$\begin{cases} -x+y+3z+2w=0 \\ -x+y+2z+2w=0 \\ x-y+z-2w=0 \end{cases}$$

19. Treść jak w zadaniu 17, dla układu

$$\begin{cases} 2y-z+t=0 \\ x+3y+2t=-1 \\ x-3y+3z-t=-1 \end{cases}$$

20. Rozwiązać nierówność

$$\det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x & 0 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & x \end{bmatrix} > 2x$$

21. Dla jakich $m \in \mathbb{R}$ macierz A jest nieosobliwa:

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & m \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć A^{-1} dla $m=0$.

WSKAZÓWKA. Macierz A nazywamy nieosobliwą jeśli $\det A \neq 0$.

22. Dla jakich ~~me~~ $m \in \mathbb{R}$ macierz A jest nieosobliwa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 1 & -3 \\ 1 & m & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć A^{-1} dla $m=1$.

WSKAZÓWKA. Patrz wsk. zad. 21

23. Wyznaczyć macierz X:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - 3I + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}^T$$

gdzie I jest macierzą jednostkową.

24. Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$. Obliczyć A^2, A^3, A^4.

Udowodnić metodą indukcji matematycznej, że

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & b \cdot \frac{a^n - c^n}{a-c} \\ 0 & c^n \end{bmatrix},$$

$n = 1, 2, \ldots$; korzystając z powyższego wzoru wyznaczyć A^5 dla macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A^5 = ?$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^n = ?$, $A^{2018} = ?$

Wskazówka. W przykładzie b skorzystać ze wzoru

$$a^n - c^n = (a-c)(a^{n-1} + a^{n-2}c + a^{n-3}c^2 + \ldots + ac^{n-2} + c^{n-1})$$
$$= (a-c)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} c^{k-1}.$$

25. Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Oblicz A^2, A^3, A^4. Udowodnij metodą indukcji matematycznej, że

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix},$$

dla $n = 1, 2, \dots$

Korzystając z powyższego wzoru oblicz

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^5$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{2018}$

26. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Oblicz A^2, A^3, A^4.

Udowodnij metodą indukcji matematycznej, że

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Oblicz A^{200}, $\det(A^{2018})$, $A^n - I$ $(n = 1, 2, \dots)$, $A^{2n} - 2A^n + I$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Sprawdzić, że dla dowolnego $n \in N$ zachodzi

$$(A^n - I)^2 = A^{2n} - 2A^n + I, \quad \text{gdzie}$$

gdzie I jest macierzą jednostkową,
tzn.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. Niech X będzie macierzą spełniającą równość

(1) $$A^{-1} X A = B,$$

gdzie $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, natomiast A jest dowolną macierzą stopnia 3-go nieosobliwą. (tj. odwracalną).
Obliczyć wartość wielomianu

(2) $$f(X) = 5X^3 + I,$$

gdzie I jest macierzą jednostkową.

WSKAZÓWKA.

1. Z podanej równości (1) wyznaczyć $X = ABA^{-1}$

2. Udowodnić wzór:

(3) $$X^n = AB^nA^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Wsk.: $X^n = (ABA^{-1}) \cdot (ABA^{-1}) \cdot \ldots \cdot (ABA^{-1}) = \ldots$ itd.

3. Obliczyć B^3, a następnie $f(B)$

4. Wykazać, że

$$(4) \quad f(X) = A\, f(B)\, A^{-1}$$

Wsk.

$$f(X) = 5X^3 + I = 5(AB^3A^{-1}) + I =$$
$$= 5(AB^3A^{-1}) + AIA^{-1} =$$
$$= A\,(\underbrace{5B^3 + I}\,)A^{-1} = A\,f(B)\,A^{-1}$$

5. Korzystając ze wzoru (4) obliczyć $f(X)$.

✓