Analiza matematyczna

1. Ciągi rzeczywiste

Def.

Ciągiem (rzeczywistym) nazywamy dowolną funkcję

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Wartości funkcji f nazywamy wyrazami ciągu i oznaczamy przez

$$a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Przyjmujemy następujące oznaczenia dla ciągu: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; (a_n)

Def. Ciąg (a_n) nazywamy zbieżnym, jeśli istnieje liczba $g \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - g| < \varepsilon .$$

Liczbę g nazywamy granicą ciągu (a_n).
Piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \text{lub} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$$

Ciąg (a_n), który nie jest zbieżny nazywamy rozbieżnym.

Własności granic

Twierdz. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_2$ to $g_1 = g_2$. (Jeśli ciąg ma granicę to tylko jedną !!!).

Twierdz. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony, tzn. jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny to $\bigvee\limits_{M>0} \bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge\limits_{m\in\mathbb{N}} |a_n - a_m| < M$

Def. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem i niech dany będzie ciąg (n_k), $k\in\mathbb{N}$ liczb naturalnych takich, że

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

Ciąg (a_{n_k}), $k\in\mathbb{N}$ nazywamy podciągiem ciągu (a_n).

Twierdz. Każdy podciąg ciągu zbieżnego ma tę samą granicę co ciąg.

Twierdz. Ciąg (a_n) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego podciąg $(a_{n_k})_{k\in N}$ zawiera podciąg $(a_{n_{k_l}})_{l\in N}$ zbieżny

Twierdzenie (o ciągłości wartości bezwzględnej)
jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ to $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |g|$

Twierdzenie (o ciągłości działań arytmetycznych)
Niech ciągi (a_n) i (b_n) będą zbieżne i niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Wówczas ciągi $(a_n \pm b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, $(b_n \neq 0)$ są zbieżne oraz

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a+b$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = ab$

3. $\left(\bigwedge\limits_{n\in N} b_n \neq 0 \wedge b \neq 0\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Twierdz. (o przechodzeniu do granicy w nierówności słabej)

jeśli $\bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{\substack{n > n_0 \\ n \in N}} a_n \le b_n$ to

$$\lim_{n \to \infty} a_n \le \lim_{n \to \infty} b_n$$

Twierdz. (o trzech ciągach)

Jeśli $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = g = \lim\limits_{n \to \infty} c_n$ oraz

$\bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{\substack{n > n_0 \\ n \in N}} a_n \le b_n \le c_n$ to $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = g$

Def Ciąg rzeczywisty (a_n) nazywamy

1. rosnącym, jeśli $\bigwedge_{n \in N} a_{n+1} \ge a_n$ (niemalejącym)
2. ściśle rosnącym, jeśli $\bigwedge_{n \in N} a_{n+1} > a_n$ (rosnącym)
3. malejącym, jeśli $\bigwedge_{n \in N} a_n \ge a_{n+1}$ (nierosnącym)
4. ściśle malejącym, jeśli $\bigwedge_{n \in N} a_n > a_{n+1}$ (malejącym)

Ciągi spełniające warunek 1) lub 3) nazywamy monotonicznymi, warunek 2) lub 4) - ściśle monotonicznymi.

<u>Def.</u> Mówimy, że ciąg rzeczywisty (a_n) ma

1. granicę nieskończoną (niewłaściwą) $+\infty$ jeśli

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{\substack{n>n_0 \\ n \in N}} a_n > M$$

Piszemy wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ lub } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

2. granicę nieskończoną (niewłaściwą) $-\infty$ jeśli

$$\bigwedge_{M>0} \bigvee_{n_0 \in N} \bigwedge_{\substack{n>n_0 \\ n \in N}} a_n < -M$$

Piszemy wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ lub } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

<u>UWAGA</u>
Ciąg, który ma granicę $+\infty$ lub $-\infty$ nie jest ograniczony, więc jest ciągiem rozbieżnym. O ciągu takim, mówimy, że jest rozbieżny do $+\infty$ lub do $-\infty$.

<u>UWAGA</u> Ciąg rzeczywisty (a_n) jest <u>albo</u>

1. <u>zbieżny</u> (tzn. ma granicę skończoną)

albo

2. <u>rozbieżny</u> (tzn. <u>albo</u> ma granicę niewłaściwą $+\infty$ lub $-\infty$ <u>albo</u> **<u>nie ma</u>** granicy ani skończonej ani nieskończonej)

Ciągi cz.

Twierdz. Każdy podciąg ciągu rozbieżnego do $+\infty$ ($-\infty$) jest rozbieżny do $+\infty$ ($-\infty$).

Twierdz. Załóżmy, że $\bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > n_0} a_n \geq b_n$

1. Jeśli $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ to $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$
2. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ to $\lim b_n = -\infty$

Twierdz. Niech $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\right) \iff \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0\right).$$

Twierdz. Każdy ciąg monotoniczny ma granicę. Przy tym, jeśli:

1. Ciąg (a_n) jest niemalejący, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

2. Ciąg (a_n) jest nierosnący, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

WNIOSEK KAŻDY CIĄG MONOTONICZNY I OGRANICZONY JEST ZBIEŻNY.

Twierdz. (Bolzano - Weierstrass)

Każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg zbieżny.

Twierdz. Jeśli wszystkie podciągi zbieżne danego ciągu ograniczonego mają tę samą granicę g, to dany ciąg też ma granicę g.

Przykłady (granic do zapamiętania)

1. Jeśli $p>0$ to

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

2. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, to $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k$, $k \in \mathbb{N}$

3. Jeśli $a>0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

4. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

! 5.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } q>1 \\ 1 & \text{gdy } q=1 \\ 0 & \text{gdy } q\in(-1,1) \\ \text{nie istnieje} & \text{gdy } q\le -1 \end{cases}$$

<u>Twierdz.</u>

Jeśli $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$

<u>Twierdz.</u> Niech $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$
jeśli $g < 1$ to $\lim a_n = 0$.

<u>Twierdz.</u> Niech $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim \sqrt[n]{a_n} = g$
jeśli $g < 1$ to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

<u>Liczba e</u>

Niech $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

<u>Twierdz.</u> Ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony.

<u>UWAGA</u> Ponieważ każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny (→ patrz odpowiedni wniosek) to ciąg (a_n) posiada granicę skończoną. Granicę ciągu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ oznaczamy literą e
(Euler – Leonard Euler, Szwajcaria 1707 – 1783)

Zatem $\boxed{e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = 2{,}71828\ldots$

Można wykazać, że e jest <u>liczbą niewymierną</u>

Twierdz. Jeśli $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ to

1. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$
2. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{a_n}\right)^{a_n} = e^{\alpha}$ dla dow. $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ to $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = e$

Przykład

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n^2}\right)^{5n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n^2}\right)^{5n^2} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n^2}\right)^{-1}}_{=1} = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1-\frac{3}{4n^2}\right)^{-\frac{4n^2}{3}}}_{\to e}\right)^{-\frac{15}{4}} \cdot 1$$

$$\boxed{(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \xrightarrow[a_n\to 0]{} e}$$

$$= e^{-\frac{15}{4}} \cdot 1 = e^{-\frac{15}{4}}$$

Twierdz. ! Niech $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n > 0$ i niech ciągi (a_n) i (b_n) będą zbieżne, tzn. mają granice skończone $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Zakładamy ponadto, że $\underline{a > 0}$. Wtedy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = a^b}$$

Przykład

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2-2}{5n^2+1}\right)^{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(5n^2+1)-3}{(5n^2+1)}\right)^{2n^2+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{5n^2+1}\right)^{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1-\frac{3}{5n^2+1}\right)^{5n^2+1}}_{\to\, e^{-3} > 0 \;=\; a}\right]^{\underbrace{\frac{2n^2+3}{5n^2+1}}_{\to\, \frac{2}{5} \;=\; b}}$$

$$= \left(e^{-3}\right)^{\frac{2}{5}} = \underline{\underline{e^{-\frac{6}{5}}}}$$